Hitchin section に含まれる階数 3 の Higgs 束の調和計量

京都大学　大学院理学研究科　数学・数理解析専攻　数理解析系
藤岡舜 (Hitoshi FUJIOKA) *

概要

リーマン面上に正則微分の組が与えられると，Hitchin section に含まれる Higgs 束を定義でき，それは自然な対称積を持っている．本講演では，Hitchin section に含まれる階数 3 の Higgs 束について，スペクトル曲線が 2 重被覆になる条件の下で，対称積と整合的な調和計量の存在について説明する．特に $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^*$ 上の場合を扱う．

1　Higgs 束と調和計量

本稿では X をリーマン面とする．X 上の **Higgs 束** (E,θ) とは，X 上の正則ベクトル束 E と正則なベクトル束の射 $\theta : E \to E \otimes K_X$ の組のことである．ここで K_X とは X の余接束を指す．θ を Higgs 場と呼ぶ．まず，本稿の主題である Hitchin 方程式とその解である調和計量を紹介しよう．

定義 1.1. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．E のエルミート計量 h が次の方程式 (Hitchin 方程式) を満たすとき h を**調和計量**という．

$$F_{\nabla_h} + [\theta, \theta^{*h}] = 0. \tag{1}$$

ここで，∇_h は h に関する Chern 接続であり，F_{∇_h} はその曲率である．また θ^{*h} は h に関する θ の随伴である．このとき，組 (E,θ,h) のことを調和束と呼ぶ．

注意 1.2. 式 (1) は接続 $\nabla_h + \theta + \theta^{*h}$ の曲率が 0 であることを指す．

Hitchin は Yang–Mills の自己双対方程式を次元簡約することで式 (1) を導入した [3]．与えられた Higgs 束が調和計量を持つかどうか調べるのは一般には難しい問題である．しかし，いくつかの場合によく知られている事実がある．本章では X がコンパクトリーマン面であるときの重要な定理を紹介する．

まずベクトル束の次数や Higgs 束の安定性について紹介する．

定義 1.3. E を X 上の $\mathbb{C}$ ベクトル束とする．E の**次数** $\deg(E)$ を次で定義する．

$$\deg(E) = \int_X c_1(E).$$

ここで $c_1(E)$ とは E の第一チャーン類のことである．E の次数を E の階数で割った値を $\mu(E)$ で表し，**slope** と呼ぶ．

* E-mail:fujioka@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義 1.4. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．$\theta(F)\subset F\otimes K_X$ を満たすような E の任意の部分束 F に対し，$\mu(F)<\mu(E)$ を満たすとき，(E,θ) は**安定**であるという．また (E,θ) が同じ slope を持つ安定な Higgs 束の直和として表せるとき，**多重安定**であるという．

調和計量の存在について，次の Hitchin[3]，Simpson[9] による結果が有名である．

定理 1.5 (小林–Hitchin 対応)**.** X がコンパクトであるとする．このとき次が同値である．

- Higgs 束 (E,θ) が調和計量をもつ．
- Higgs 束 (E,θ) が多重安定かつ $\deg(E)=0$ である．

つまり，コンパクトリーマン面上の与えられた Higgs 束が調和計量をもつかどうか判定するには安定性を調べればよいというである．コンパクトでないリーマン面上の Higgs 束についての統一的な結果はないが，コンパクトリーマン面から有限個の点をのぞいたようなリーマン面上の Higgs 束については類似の対応定理が存在する．また特別な形の Higgs 束についてもいくつか調べられている．

2 Hitchin section に含まれる Higgs 束

X を種数が 2 以上のコンパクトリーマン面とする．階数 r の Higgs 束 (E,θ) が $\mathrm{Tr}\,\theta=0$ と $\det(E)\cong\mathcal{O}_X$ を満たすとき，$\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-Higgs 束という．$X$ 上の多重安定な $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-Higgs 束のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}$ で表すことにする．

定義 2.1. 次で定義される写像を **Hitchin ファイブレーション**という．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=2}^{r} H^0(X,K_X^i). \\ \cup & & \cup \\ [E,\theta] & \longmapsto & (p_2(\theta),\dots,p_r(\theta)) \end{array}$$

ここで $p_2,\dots,p_r$ は $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-不変多項式環の生成元である．

$K_X^{1/2}$ を一つ固定する．**Hitchin section** とは，Hitchin が [4] でタイヒミュラー空間のある種の一般化を考えるために導入したもので，Hitchin ファイブレーションの右逆射である．つまり任意の $q=(q_2,\dots,q_r)\,(q_j\in H^0(X,K_X^j))$ に対し，ある Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r},\theta(q))$ を対応させるものである．この Higgs 束は次のように与えられる：

$$\mathbb{K}_{X,r}=\bigoplus_{i=1}^{r}K_X^{(r-2i+1)/2},\quad \theta(q)=\begin{pmatrix} 0 & q_2 & q_3 & \cdots & q_r \\ 1 & 0 & q_2 & \cdots & q_{r-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この形の Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r},\theta(q))$ を，X が必ずしもコンパクトでないようなリーマン面の場合でも **Hitchin section に含まれる Higgs 束**と呼ぶことにする．

次に Higgs 束の対称積とそれに関連する概念を定義する．

定義 2.2. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．ベクトル束 E の正則な対称積 $C:E\otimes E\to\mathcal{O}_X$ が

$C(\theta \otimes \mathrm{id}_E) = C(\mathrm{id}_E \otimes \theta)$ を満たすとき，(E, θ) の**対称積**であるという．また X のすべての点のファイバー上で C が非退化であるとき，C は非退化であるという．

定義 2.3. C を Higgs 束 (E, θ) の非退化な対称積とする．E のエルミート計量 h が対称積 C と**整合的**であるとは，写像 $\Phi_C : E \to E^*, v \mapsto C(-, v)$ が h と h^* に関して等長となることをいう．ここで h^* は E^* に誘導されるエルミート計量である．

Hitchin section に含まれる Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r}, \theta(q))$ は

$$K_X^j \otimes K_X^{-j} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

から定まる自然な対称積をもつ．これを $C_{X,r}$ と表すことにする．

次のような問題を考えることができる．

問題. Hitchin section に含まれる Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r}, \theta(q))$ は対称積 $C_{X,r}$ と整合的な調和計量を持つか．

この問題に関して，次のような先行研究がある．

1. Li–望月 [7] は，X が双曲的，つまり普遍被覆が上半平面と双正則となるとき，そのような調和計量は存在することを示した．さらに X がコンパクトであれば，そのような計量は一意に定まることも示した．
2. Li–望月 [6] は，Higgs 束が generically regular semisimple(次章で説明する) であるとき，そのような調和計量が存在することを示した．

3 主定理

主定理に必要な Higgs 束のスペクトル曲線について説明する．

定義 3.1. (E, θ) を X 上の階数 r の Higgs 束とする．(E, θ) の**スペクトル曲線** Σ_θ を

$$\Sigma_\theta = \{\lambda \in K_X \mid \det(\lambda\, \mathrm{id}_E - \theta) = 0\}$$

で定める．$K_X \to X$ を Σ_θ に制限して得られる写像を $\pi : \Sigma_\theta \to X$ で表すことにする．正の整数 n を

$$n = \max_{p \in X}(\#\pi^{-1}(p))$$

とするとき，$\pi : \Sigma_\theta \to X$ は n **重の分岐被覆**であるという．特に $n = r$ のとき，(E, θ) は generically regular semisimple であるという．

以下では，$\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^*$ の標準的な座標を z で書く．さらに $\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を加えた空間とみなす．

講演者は X が非コンパクトかつ放物的，つまり $X = \mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{C}^*$ で階数が 3 の場合に，q が $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるという条件の下で次の結果を得た．

定理 3.2. q は $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるとする．$(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ が generically regular semisimple でない，つまり $\pi : \Sigma_{\theta(q)} \to \mathbb{C}$ が 1 重もしくは 2 重の分岐被覆のとき，次を満たす多項式 $f \in \mathbb{C}[z]$ が存在する．

$$q_2 = 3 \cdot 2^{-5/3} f^2 (dz)^2, \quad q_3 = f^3 (dz)^3.$$

このとき，f の次数が 2 以上ならば $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ は対称積 $C_{\mathbb{C},3}$ と整合的な調和計量を持ち，そうでないならば持たない．

定理 3.3. q は $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるとする．$\pi : \Sigma_{\theta(q)} \to \mathbb{C}^*$ が 1 重もしくは 2 重の分岐被覆のとき，次を満たすローラン多項式 $f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ が存在する．

$$q_2 = 3 \cdot 2^{-5/3} f^2 (dz/z)^2, \quad q_3 = f^3 (dz/z)^3.$$

このとき，f が定数でない場合に限り，$(\mathbb{K}_{\mathbb{C}^*,3}, \theta(q))$ は対称積 $C_{\mathbb{C}^*,3}$ と整合的な調和計量を持つ．

階数 3 で q が有理型である場合は，定理 3.2，3.3 と [6, Theorem 2.34] によって，整合的な調和計量の存在についての必要十分条件を与えていることがわかる．

定理 3.2 の $\deg(f) \geq 1$ の場合にのみ証明の概略を述べる．詳しい議論やいくつかの言葉の定義は [2] を参照のこと．まず鍵となるのは Li–望月による次の定理である．

定理 3.4 ([6])**.** X をコンパクトリーマン面とし，D をその有限部分集合とする．このとき次の対象は同値である．

- 非退化な対称積と整合的な (X, D) 上wild な調和束，
- 完全な対称積をもつ (X, D) 上の good かつ多重安定なフィルター付き Higgs 束．

q が有理型という条件は wild という条件に対応しており，定理 3.4 を用いることができる状況になっている．よって，考えたい調和計量の存在問題は次の 2 つの問題に分解される．

問 A Higgs 束 $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ の $\mathbb{P}^1$ への有理型な延長, つまり $E|_{\mathbb{C}} = \mathbb{K}_{\mathbb{C},3}$ を満たす局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$ 加群 E で，$\theta(q)$ と $C_{\mathbb{C},3}$ が有理型に延びるものはあるか．

問 B 問 A で考えた E 上に定まるフィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}_*E, \theta(q))$ であって，good かつ多重安定で $C_{\mathbb{C},3}$ が完全となるように延びるものはあるか．

これらの問題を考えるために，$\theta(q)$ に関する広義固有空間分解と整合的な無限遠点まわりの $\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}$ の枠 s_1, s_2, s_3 をとる．このとき，問 A の解答となる次の補題が成り立つ．

補題 3.5. $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ の $\mathbb{P}^1$ への有理型な延長 E は

$$E_\infty = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}(*\infty) s_i \tag{2}$$

で定まるものただ一つである．

よって，問 B では式 (2) で定まる E 上のフィルター付き Higgs 束についてのみ考えれば良い．

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ とする．E 上のフィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ として，

$$\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_c E_\infty = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}([c - d_i]\infty)s_i, \quad c \in \mathbb{R}.$$

で定まるものを考える．ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を指す．以下の 2 つの補題が成り立つ．

補題 3.6. $\deg(f) \geq 2$ のとき，ある $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ が存在して，フィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ は問 B の条件を満たす．$\deg(f) = 1$ のとき，そのような $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ は存在しない．

補題 3.7. E 上のフィルター付き Higgs 束で good かつ $C_{\mathbb{C},3}$ が完全となるように延びるものは，$(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ で定まるもののみである．

補題 3.6，3.7 により定理 3.2 の $\deg(f) \geq 1$ の場合を得る．

参考文献

[1] Biquard O., Boalch P., Wild nonabelian Hodge theory on curves, Compositio Math. **140** (2004), 179–204.

[2] Fujioka H., Harmonic metrics for Higgs bundles of rank 3 in the Hitchin section, SIGMA **20** (2024), no. 111.

[3] Hitchin N. J., The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 59–126.

[4] Hitchin N. J., Lie groups and Teichmüller space, Topology **31** (1992), 449–473.

[5] Li Q., Mochizuki T., Complete solutions of Toda equations and cyclic Higgs bundles over non-compact surfaces, arXiv:2010.05401.

[6] Li Q., Mochizuki T., Harmonic metrics of generically regular semisimple Higgs bundles on noncompact Riemann surfaces, Tunisian Journal of Math. **5** (2023), 663–711.

[7] Li Q., Mochizuki T., Higgs bundles in the Hitchin section over non-compact hyperbolic surfaces, Proc. London Math. Soc. **129** (2024), no. 6, Paper No. e70008.

[8] Mochizuki T., Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, Astérisque **340** (2011).

[9] Simpson C. T., Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, Journal of the American Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[10] Simpson C. T., Harmonic bundles on noncompact curves, Journal of the American Math. Soc. **3** (1990), 713–770.